

TRANSFERT DE MATIERE GLOBAL LIQUIDE-PAROI POUR DES ECOULEMENTS ASSOCIANT TOURBILLONS DE TAYLOR ET CIRCULATION AXIALE FORCEE

J. LEGRAND* et F. COURETT†

Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques et Thermiques (LA CNRS No. 191), 40 avenue du Recteur Pineau,
86022 Poitiers cedex, France

(Reçu le 10 février et sous forme révisée le 21 juin 1981)

Résumé— L'étude intéressante le transfert de matière global liquide-paroi dans le cas de l'écoulement laminaire tourbillonnaire dans des espaces annulaires cylindriques; cet écoulement résulte de la combinaison de la circulation axiale forcée du liquide et de la rotation du cylindre intérieur. On déduit des corrélations empiriques exprimant le nombre de Sherwood en fonction du nombre de Reynolds axial Re_a et du nombre de Taylor Ta , pour trois valeurs de l'espace intercylindres. On discute les résultats obtenus sur la base de l'existence ou non d'une périodicité circonférentielle des structures tourbillonnaires.

NOMENCLATURE

$A,$	constante =
	$[1 + N^2 + (1 - N^2)/\ln N]/$
	$[2 + (1 - N^2)/\ln N];$
$D,$	coeffcient de diffusion;
$e,$	$= R_2 - R_1$, épaisseur de l'espace annulaire;
$f,$	facteur de frottement;
$I_L,$	intensité limite de diffusion;
$k,$	coeffcient global de transfert de matière;
$N,$	$= R_1/R_2$, rapport des rayons des cylindres;
$Nu,$	nombre de Nusselt;
$Pr,$	nombre de Prandtl;
$R_1,$	rayon du cylindre intérieur tournant;
$R_2,$	rayon intérieur du cylindre extérieur fixe;
$Re_a,$	$= u \cdot 2e/v$, nombre de Reynolds axial;
$S_1,$	surface de transfert sur le cylindre tournant;
$S_2,$	surface de transfert sur le cylindre extérieur fixe;
$Sc,$	$= v/D$, nombre de Schmidt;
$Sh,$	$= k \cdot 2e/D$, nombre de Sherwood;
$Ta,$	$= (e/R_1)^{1/2} R_1 \omega e/v$, nombre de Taylor;
$Ta_c,$	nombre de Taylor critique (1ère instabilité);
$Ta'_c,$	nombre de Taylor critique (2ème instabilité);
$u,$	vitesse axiale moyenne dans l'espace annulaire;
$v,$	viscosité cinématique;
$\omega,$	vitesse angulaire de rotation du cylindre intérieur.

INTRODUCTION

POUR l'écoulement dans un espace annulaire cylindrique associant débit axial et rotation du cylindre intérieur, la recherche du lien entre la structure de cet écoulement et le transfert de matière (ou de chaleur)

fluide-paroi a été peu examinée, sans doute en raison de la complexité du problème hydrodynamique de cet écoulement de Couette-Poiseuille. On admet en général qu'il existe quatre régimes caractéristiques [1]:

- le régime laminaire,
- le régime laminaire avec tourbillons de Taylor,
- le régime turbulent,
- le régime turbulent avec tourbillons de Taylor, mais certains auteurs, comme par exemple [2], signalent des sous-régimes tourbillonnaires caractérisés par la présence de tourbillons secondaires.

Le cas du régime laminaire avec tourbillons de Taylor a pour situation limite, à débit axial nul, celle qui a été étudiée expérimentalement par Coles [3] et Cognet [4] qui mettent en évidence, notamment, l'influence des facteurs géométriques sur la structure de l'écoulement de Couette entre les deux cylindres. L'apport d'un débit axial sur un tel écoulement tourbillonnaire a un effet modificateur. En effet, si à faible débit axial les tourbillons se déplacent axialement sans se détruire [2], un accroissement de ce débit entraîne une destruction des tourbillons d'autant plus importante à vitesse de rotation donnée que le débit axial est plus grand. A côté de la structure toroïdale idéale des tourbillons de Taylor, il existe une multitude de structures. Ceci est probablement à l'origine de la difficulté qui apparaît, au travers d'études tant théoriques qu'expérimentales, lorsqu'il s'agit de préciser la transition entre les différents régimes d'écoulement énumérés plus haut [5].

Le présent travail expérimental a été entrepris dans le but d'examiner le transfert de matière liquide-paroi dans le cas du régime laminaire avec tourbillons et associant écoulement axial (caractérisé par le nombre de Reynolds Re_a) et rotation du cylindre intérieur (définissant le nombre de Taylor Ta). Les mesures, de caractère global, visent à souligner dans des corrélations empiriques l'influence des paramètres hydrodynamiques et de l'épaisseur e de l'espace annulaire sur les coefficients de transfert de matière à la paroi du cylindre tournant comme à celle du cylindre fixe.

*Maître-Assistant à l'I.U.T. Génie Chimique 44606 Saint Nazaire, France.

†Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes, Avenue du Général Leclerc 35000 Rennes Beaulieu, France.

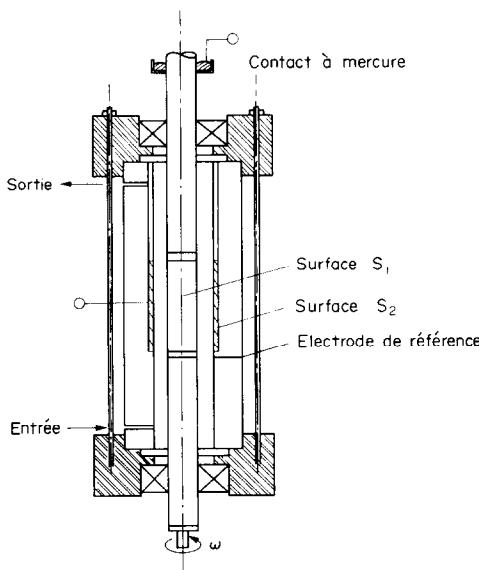


FIG. 1. Vue schématique du dispositif étudié.

METHODE EXPERIMENTALE

La cellule de mesure est schématisée à la Fig. 1 ; elle est constituée de matériaux compatibles avec la mise en oeuvre de la détermination électrochimique des coefficients de transfert de matière. Le cylindre intérieur tournant, de rayon R_1 maintenu constant ($2R_1 = 35$ mm), a pour longeur totale dans la cellule 316 mm. La hauteur $L = 100$ mm de sa partie médiane est une électrode (surface S_1) ; en regard, une électrode cylindrique de même longueur (surface S_2) est incorporée à la paroi intérieure du cylindre extérieur fixe qui est en altuglas. Trois cylindres extérieurs ont été utilisés, définissant les espaces intercylindres $e = R_2 - R_1$ suivants : $e = 2.5$ mm ; 5.0 mm ; 7.5 mm, et les rapports R_2/R_1 de 1.14 ; 1.29 et 1.43 .

L'électrode tournante et les électrodes fixes sont des surfaces de platine obtenues par dépôts électrolytiques successifs d'or et de platine sur des bases de nickel. Le liquide est introduit à la base de l'espace annulaire et est évacué à la partie supérieure ; il circule en circuit fermé au travers d'une pompe, d'un réservoir et d'un jeu de rotamètres. C'est une solution aqueuse de ferricyanure (0.005 M) et de ferrocyanure (0.25 M) de potassium dans la soude 0.5 N utilisée comme électrolyte support ; la réaction mise en oeuvre pour déterminer les coefficients de transfert de matière est la réduction cathodique des ions ferricyanure (la concentration de ces ions est connue par ampérométrie sur électrode tournante). Les courbes intensité-potentiel présentent un plateau de diffusion bien défini, dont la hauteur représente l'intensité limite de diffusion I_L ; à partir de I_L on a pu déduire le coefficient de transfert de matière k au travers de l'équation :

$$k = \frac{I_L}{z \cdot F \cdot S \cdot C_s} \quad (1)$$

où z est le nombre d'électrons mis en jeu dans la

réaction ($z = 1$), F le Faraday, S la surface de l'électrode et C_s la concentration en ferricyanure au sein de l'électrolyte.

L'étendue de la variation des variables expérimentales est donnée ci-dessous :

- fréquence de rotation du cylindre (tours/min) : $0-300$,
- débit axial de liquide (litres/heure) : $5-160$,
- nombre de Taylor Ta : $135-3700$,
- nombre de Reynolds axial Re_a : $25-820$.

Toutes les mesures ont été effectuées à température constante (30°C) ; le nombre de Schmidt a lui aussi été maintenu constant ($Sc = 1382$) étant donné qu'une étude préliminaire avait déjà établi son influence en $Sc^{1/3}$ [6]. On a utilisé une microélectrode de platine affleurant la surface interne du cylindre fixe, et dans la partie basse de celui-ci, pour confirmer—au-travers de l'allure des signaux électriques recueillis—la présence de structures tourbillonnaires régulières, au moins aux faibles débits axiaux ; le signal électrique recueilli est d'allure sinusoïdale.

RESULTATS EXPERIMENTAUX

1. Influence des paramètres hydrodynamiques

La Fig. 2, obtenue pour $R_2/R_1 = 1.29$, est assez caractéristique des influences de Re_a et de Ta sur le nombre de Sherwood. Quelle que soit la valeur de Re_a , Sh croît avec Ta ; l'influence de Re_a , à Ta fixé, est plus complexe :

—aux faibles valeurs de Re_a , on ne peut pratiquement pas discerner l'influence de ce paramètre.

—hors de ce domaine des faibles Re_a , et sensiblement lorsque $Re_a > 300$, Sh croît à la fois avec Re_a et Ta .

A nombre de Taylor fixé, l'introduction d'un faible débit axial sur l'écoulement de Couette (rotation seule du cylindre intérieur, $Re_a = 0$) entraîne une diminution du coefficient de transfert de matière. Il est vrai que l'introduction d'un débit fait apparaître une compétition entre deux effets qui ont des influences contraires sur le transfert de matière : d'une part la perturbation de la structure harmonieuse des tourbillons de Taylor qui subissent un allongement dans le sens axial, d'autre part l'augmentation des forces de frottement sur la surface de transfert.

Les expériences n'ont pas été possibles dans les conditions telles que $0 < Re_a < 25$ mais, pour un tel domaine, les travaux de Kataoka *et al.* [2] ont montré l'influence négative de l'accroissement de Re_a . Pour $25 < Re_a < 300$, le transfert de matière n'est pas influencé par Re_a (Fig. 2) : les deux effets contraires indiqués ci-dessus se compensent. Au delà de $Re_a = 300$, l'augmentation des forces de frottement devient prépondérante et Sh augmente avec Re_a .

2. Corrélations empiriques des résultats

Les Figs. 3 et 4 regroupent l'ensemble des résultats obtenus pour chacun des deux domaines séparés par $Re_a = 300$; le grand nombre de valeurs expérimentales

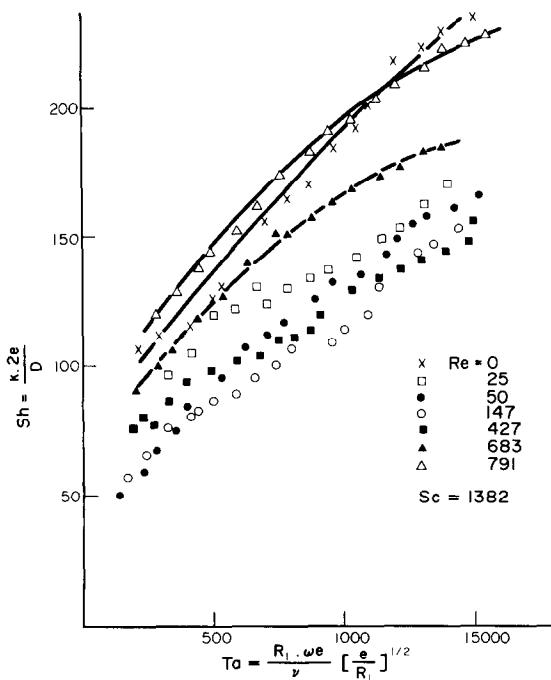


FIG. 2. Exemples de résultats expérimentaux montrant, pour $e = 5.0 \text{ mm}$, l'influence séparée de Ta et Re_a sur Sh [cas du transfert à la surface S_1].

et le recouvrement partiel des domaines explorés imposent de ne donner que les contours rigoureux contenant les points expérimentaux. Les corrélations empiriques des résultats sont obtenues par analyse régressive.

(a) Pour $Re_a < 300$, deux corrélations qui diffèrent par le coefficient numérique multiplicatif ont été déduites suivant la valeur de l'espace intercylindres (Fig. 3):

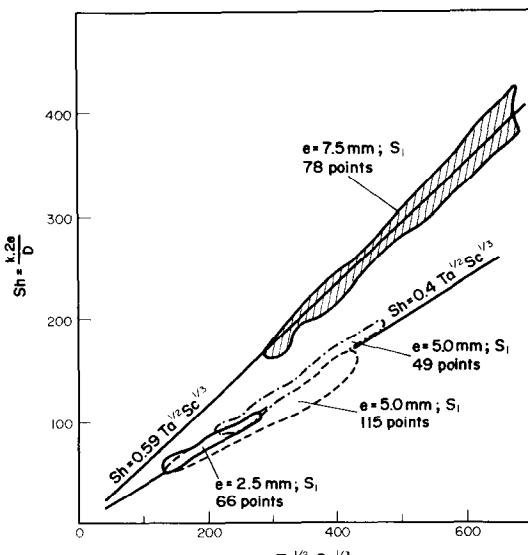


FIG. 3. Représentation globale des résultats obtenus pour $Re_a < 300$.

$$\text{pour } \frac{R_2}{R_1} = 1.14 \text{ et } 1.29, \quad Sh = 0.40 Sc^{1/3} Ta^{1/2}, \quad (2)$$

$$\text{pour } \frac{R_2}{R_1} = 1.43, \quad Sh = 0.59 Sc^{1/3} Ta^{1/2}. \quad (3)$$

L'exposant $1/2$ de Ta est le même que celui qui est mis en évidence pour le transfert de matière ou de chaleur liquide-paroi dans un dispositif de Couette et pour le régime laminaire avec tourbillons de Taylor [7, 8], ce qui conduit à penser que (2) et (3) correspondent bien à un régime laminaire tourbillonnaire. La littérature ne mentionne pas d'études de transfert se rapportant à des dispositifs de faible distance intercylindres et des Re_a faibles, de telle sorte que l'on ne dispose pas pour (2) et (3) d'éléments de comparaison. Seuls les résultats graphiques de Kataoka *et al.* [2], déduits pour $R_2/R_1 = 1.62$ et des valeurs de Re_a comprises entre 4 et 50, peuvent être comparés aux corrélations ci-dessus; pour $Re_a > 30$ il apparaît que Sh est indépendant de Re_a et que l'on peut corrélérer les résultats comme (2) et (3) mais avec un coefficient numérique multiplicatif égal à 0.57. L'on constate donc que (3), qui correspond à l'espace e le plus large ($e = 7.5 \text{ mm}$), se trouve en assez bon accord avec les résultats de Kataoka qui correspondent à des tourbillons de grande taille ($e = 18 \text{ mm}$).

(b) Pour $300 < Re_a < 800$ (Fig. 4), on doit à nouveau distinguer deux corrélations:

$$\text{pour } \frac{R_2}{R_1} = 1.14 \text{ et } 1.29, \quad Sh = 0.07 Sc^{1/3} Re_a^{1/3} Ta^{0.47}, \quad (4)$$

$$\text{pour } \frac{R_2}{R_1} = 1.43, \quad Sh = 0.10 Sc^{1/3} Re_a^{1/3} Ta^{0.47}, \quad (5)$$

mais, comme le montre la Fig. 4, (5) n'est représentative des valeurs expérimentales que lorsque $Re_a > 500$. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'à des nombres de Ta élevés et $300 < Re_a < 500$, le régime turbulent tourbillonnaire peut être partiellement couvert dans cette cellule où $e = 7.5 \text{ mm}$; les valeurs expérimentales correspondantes seraient alors mieux décrites par une corrélation faisant intervenir $Ta^{2/3}$ comme on l'observe pour l'écoulement de Couette en régime turbulent avec tourbillons de Taylor [9]. La Fig. 5 donne, sous la forme de $\log Sh$ vs $\log Ta$ les valeurs expérimentales obtenues pour cet espace $e = 7.5 \text{ mm}$ auquel correspondent les valeurs de Ta les plus élevées; malgré la densité du nuage de points, on devine un accroissement de l'influence de Ta lorsque Re_a varie de 300 à 500. Cependant, seule une étude expérimentale ultérieure pourrait confirmer cette influence de Ta en $Ta^{2/3}$.

Les corrélations (4) et (5) font apparaître une influence de Re_a en $Re_a^{1/3}$ comme pour le transfert de matière liquide-paroi dans le cas d'un écoulement laminaire entre deux cylindres coaxiaux fixes [10]: l'influence du

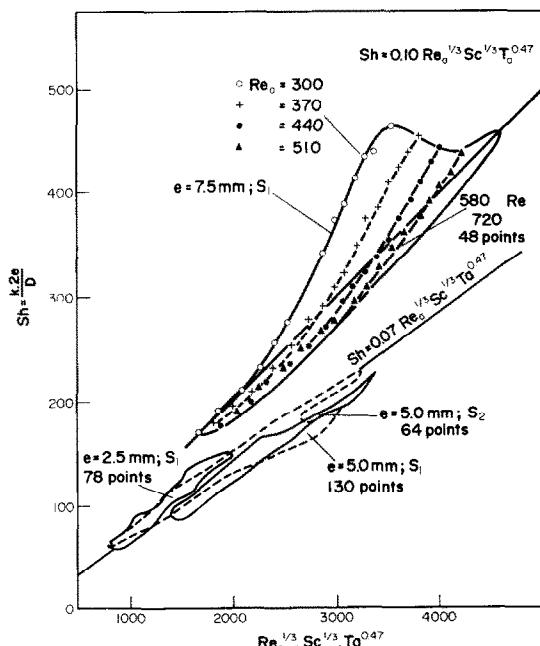


FIG. 4. Représentation globale des résultats obtenus pour $Re_a > 300$.

débit axial sur le frottement pariétal est donc de même nature dans les deux cas bien que l'un corresponde à un régime laminaire pur et l'autre à un régime laminaire tourbillonnaire.

Dans (4) et (5), Ta intervient en $Ta^{0.47}$ bien que les résultats de l'analyse régressive aient donné pour l'exposant de Ta des valeurs comprises entre 0.40 et 0.50. Cette écriture en $Ta^{0.47}$ a été adoptée parce qu'elle permet une comparaison quantitative avec des expressions déduites d'analogies; on trouvera en Annexe deux expressions ainsi obtenues qui, pour les valeurs correspondantes de R_2/R_1 , ne diffèrent de (4) et (5) que par le facteur numérique multiplicatif. Tableau 1 compare ces différents facteurs numériques et montre qu'entre les valeurs empiriques et les valeurs calculées à partir de l'expression (A7)—qui découle du modèle de Simmers et Coney [11]—l'écart est d'autant plus

important que R_2/R_1 est plus grand. Le modèle de Simmers *et al.* a été établi dans l'hypothèse de très faibles valeurs de e ($R_2/R_1 \rightarrow 1$), aussi cet écart se justifie-t-il.

3. Influence du choix de la surface de transfert et du rapport R_2/R_1

A l'examen des Figs. 3 et 4, les remarques suivantes peuvent être faites :

—pour les deux plus faibles valeurs de R_2/R_1 , le transfert de matière au cylindre intérieur tournant (surface S_1) est pratiquement de même importance que celui au cylindre extérieur fixe (surface S_2). Cette constatation est intéressante dans l'hypothèse d'une application industrielle, notamment en électrochimie [6] où les surfaces S_1 et S_2 seraient des électrodes, d'un tel écoulement.

—les différences observées entre les résultats obtenus pour $e = 2.5$ et 5.0 mm et ceux déduits pour $e = 7.5$ mm témoignent du fait que l'influence de la géométrie n'est pas totalement prise en compte dans les critères adimensionnels utilisés; cette influence interviendrait probablement au-travers de la structure elle-même de l'écoulement.

Il est intéressant de pousser plus loin cette dernière remarque et de chercher à expliquer, au moins qualitativement, pourquoi le coefficient de transfert de matière liquide-paroi est, toutes choses étant égales par ailleurs, plus important lorsque $e = 7.5$ mm que dans les autres cas. Les études de l'apparition des tourbillons de Taylor dans un écoulement de Couette s'accordent à indiquer que le passage du régime laminaire pur au régime laminaire tourbillonnaire (Fig. 6a) a lieu pour un nombre de Taylor critique $Ta_c = 41.3$. Par ailleurs, d'autres études [3, 4] mettent en évidence l'existence d'un second nombre de Taylor critique Ta'_c ($Ta'_c > Ta_c$) correspondant à l'apparition d'ondes circonférentielles sur les tourbillons de Taylor (Fig. 6b) de telle sorte que la structure résultante est doublement périodique (périodicité axiale et périodicité circonférentielle). Coles [3] a montré que pour $R_2/R_1 > 1.40$ les conditions d'apparition de cette seconde instabilité n'étaient pas satisfaites.

Dans le cas particulier où $Re_a = 0$, l'existence des ondes circonférentielles est rendue responsable de la diminution du transfert de matière liquide-paroi par rapport au cas où ces ondes n'existent pas [12]; l'ondulation des structures tourbillonnaires réduit l'importance de la composante de vitesse normale à la surface de transfert et, par conséquent le coefficient de transfert de matière. Il a été montré empiriquement dans [12], pour des cellules de mesure de géométrie identique à celles du présent travail, que le coefficient de transfert de matière à la surface S_1 dans le cas d'ondes circonférentielles (Fig. 6b) était, toutes choses égales par ailleurs, le même que s'il n'y avait pas de telles ondes (Fig. 6a) mais en mettant en œuvre la vitesse angulaire $\omega/2$ au lieu de ω . En d'autres termes, dans le cas de la Fig. 6b, tout semble se passer comme si le cylindre intérieur tournant était animé, par rapport

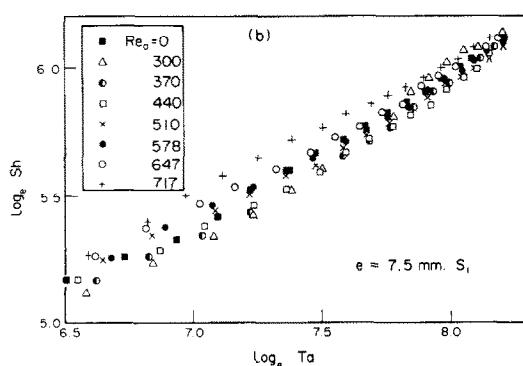


FIG. 5. Résultats expérimentaux obtenus pour $e = 7.5$ mm et représentés comme Sh vs Ta pour plusieurs valeurs de Re_a .

Tableau 1

	Valeur empirique présent travail expressions (4) ou (5)	Calculé d'après (A7)	Calculé d'après (A10)
$R_2/R_1 = 1.14$	0.07	0.152	0.101
$R_2/R_1 = 1.29$	0.07	0.211	0.140
$R_2/R_1 = 1.43$	0.1	0.255	0.169

aux tourbillons, de la vitesse angulaire relative $\omega/2$.

Pour tenter d'expliquer cette influence des ondes sur le transfert de matière, on peut remonter aux travaux de Coles [3] et de Cognet [4] qui concluent que, pour des valeurs modérées de Ta , le rapport de la vitesse tangentielle de déplacement des ondes à la vitesse périphérique de rotation du cylindre intérieur était de l'ordre de 0.5; ce rapport tendrait vers 1/3 pour des valeurs élevées de Ta . La vitesse angulaire apparente relative $\omega/2$ qui apparaît intervenir dans la situation de la Fig. 6b lorsqu'on la compare à la situation de la Fig. 6a pour laquelle intervient ω , serait ainsi en partie justifiée.

Maintenant il est raisonnable de penser que la structure tourbillonnaire de l'écoulement associant rotation et débit axial dépend de la structure présente à débit axial nul dans les mêmes conditions de rotation :

— pour $R_2/R_1 < 1.40$ (espaces intercylindres $e = 2.5$ mm et 5.0 mm), la structure de l'écoulement pour $Re_a = 0$ est du type de celle schématisée à la Fig. 6b. Les ondes ont été visualisées en injectant de la phénolphthaléine dans un tourbillon; l'allure sinusoïdale régulière du courant limite instantané de diffusion à une microélectrode en paroi inerte en est aussi une confirmation.

— pour $R_2/R_1 = 1.43$ (soit $e = 7.5$ mm) le système se trouve juste à la limite de justification de l'apparition des ondes circonférentielles. Ceci peut expliquer pourquoi, à Ta donné, le critère de Sherwood est plus grand pour cette géométrie que pour des géométries correspondant aux valeurs de e plus faibles (Fig. 3 et 4).

L'on peut remarquer, sur les équations empiriques déduites dans ce travail, que l'on passe de (3) à (2) et de (5) à (4) en remplaçant Ta par $Ta/2$. Par conséquent, même pour l'écoulement associant rotation du cylindre intérieur et débit axial, on retrouve quantitativement le résultat obtenu en [12] pour $Re_a = 0$ c'est-à-dire que tout se passe comme si le cylindre tournant était animé par rapport aux tourbillons de la vitesse angulaire $\omega/2$. La structure initiale qui est obtenue pour $Re_a = 0$ déterminerait donc beaucoup celle résultant de la superposition d'un débit axial aux configurations schématisées à la Fig. 6. Toutefois, à notre connaissance, sauf l'écoulement de Couette dont la structure a été étudiée de manière approfondie [3, 4], aucune étude n'a porté sur la forme de la structure tourbillonnaire résultant de l'apport d'un débit axial sur cet écoulement de Couette.

Dans une étude expérimentale des valeurs locales

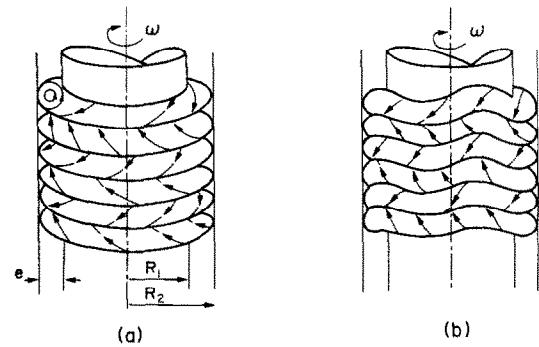


FIG. 6. Vue schématique de tourbillons entre deux cylindres coaxiaux (sans débit axial, cylindre intérieur tournant), (a) tourbillons de Taylor; (b) tourbillons avec ondes circonférentielles.

instantanées des coefficients de transfert de matière, les auteurs ont constaté que la valeur $Re_a = 300$ semblait marquer la transition entre un régime tourbillonnaire défini et un régime multi-tourbillonnaire présentant une distribution de tailles de tourbillons; les tourbillons bien définis pour $Re_a < 300$ se trouveraient brisés sous l'action du débit axial à partir de $Re_a = 300$. Les résultats de cette étude locale seront rapportés en détail ultérieurement [13].

CONCLUSIONS

L'étude expérimentale du transfert de matière global aux parois d'un espace annulaire cylindrique où

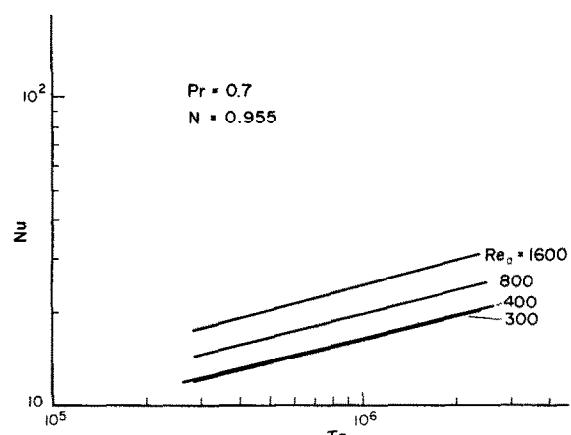


FIG. 7. Représentation graphique de l'expression (A2) pour $Pr = 0.7$ et $N = 0.955$.

rotation du cylindre intérieur et écoulement axial sont associés, a permis de souligner l'existence de liens entre la structure de l'écoulement et le transfert de matière. Le régime laminaire tourbillonnaire est celui qui a été principalement examiné mais, si Re_a et Ta sont des paramètres déterminants de la structure, on observe qu'un nombre de Reynolds axial de 300 a une certaine importance car il semble définir la frontière entre deux types d'écoulement. Par ailleurs la géométrie du système, et en particulier l'épaisseur intercylindres, a un rôle déterminant notamment au-travers de l'existence de tourbillons ondulés ou non. On projette de chercher, dans une étude de caractère local, à interpréter les résultats globaux qui ont été présentés ici.

Remerciements—Les auteurs remercient la D.G.R.S.T. (Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique) pour l'aide financière qui a permis la réalisation de ce travail.

REFERENCES

1. J. Kaye et E. C. Elgar, Modes of adiabatic and diabatic fluid flow in an annulus with an inner rotating cylinder, *Trans. ASME*, **80**, 753 (1958).
2. K. Kataoka, H. Doi et T. Komai, Heat/Mass Transfer in Taylor vortex flow with constant axial flow rates, *Int. J. Heat Mass Transfer* **20**, 57 (1977).
3. D. Coles, Transition in circular Couette flow, *J. Fluid Mech.* **21**, 385 (1965).
4. G. Cognet, Utilisation de la polarographie pour l'étude de l'écoulement de Couette, *J. Mécanique* **10**, 1, 65 (1971).
5. F. Kreith, Convection heat transfer in rotating systems, *Adv. Heat Transfer* **5**, 129 (1968).
6. J. Legrand, P. Dumargue et F. Couret, Overall mass transfer to the rotating inner electrode of a concentric cylindrical reactor with axial flow, *Electrochim. Acta* **25**, 669 (1980).
7. T. Mizushima, The Electrochemical Method in transport phenomena, *Advances in Heat Transfer*, Vol. 7, p. 87. Academic Press, New York (1971).
8. K. M. Becker et J. Kaye, Measurements of diabatic flow in an annulus with an inner rotating cylinder, *J. Heat Transfer* **84**, 97 (1962).
9. F. Tachibana et S. Fukui, Convective Heat Transfer of the rotational and axial flow between two concentric cylinders, *Bull. JSME* **7**, 26, 385 (1964).
10. T. K. Ross et A. A. Wragg, Electrochemical Mass Transfer studies in annuli, *Electrochim. Acta* **10**, 1093 (1965).
11. D. A. Simmers et J. E. R. Coney, A Reynolds Analogy solution for the Heat Transfer characteristics of combined Taylor vortex and axial flows, *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 679 (1979).
12. F. Couret et J. Legrand, Mass Transfer at the walls of a Couette-type cell with small gaps in the laminar vortex regime, *J. Appl. Electrochem.* **10**, 785 (1980).
13. J. Legrand, F. Couret et M. Billon, Etude locale du lien entre structure de l'écoulement et transfert de matière liquide-paroi dans le cas du régime laminaire tourbillonnaire de l'écoulement de Couette-Poiseuille, (en cours de rédaction).

ANNEXE

Solution déduite de [11]

Pour très faibles valeurs de e , Simmers et Coney [11] ont déduit l'expression suivante du facteur de frottement dans le

cas d'un écoulement avec tourbillons et débit axial forcé :

$$f/2 = \frac{2(1 - N)^2}{A \cdot N} \frac{Re_a}{Ta^2} \left[\frac{Ta}{Ta_c} \right]^{1.47} \quad (A1)$$

dans laquelle le facteur $[Ta/Ta_c]^{1.47}$ remplace le rapport des contraintes de frottement (écoulement étudié/écoulement de Poiseuille) et est déduit expérimentalement.

Dans [11] il est admis que toute la résistance au transfert de chaleur vers le cylindre extérieur fixe est localisée dans la sous-couche laminaire (transfert par conduction) située sur ce cylindre et aussi dans la couche tampon (transfert par convection forcée dans cette région turbulente) qui la suit. Le reste de l'épaisseur intercylindres est supposé être à température constante. Après quelques hypothèses simplificatrices supplémentaires, les auteurs établissent, pour $Pr = 1$ et $N = R_1/R_2$ voisin de 1 ($e \rightarrow 0$), l'expression donnant la chute totale de température au voisinage de la surface de transfert et en déduisent pour le nombre de Nusselt Nu l'expression :

$$Nu = \frac{4Pr Re_a^{0.5} Ta^{0.3675}}{B \left(\frac{A}{1 - N} \right)^{1/2} \left(\frac{N}{1 - N} \right)^{1/4} Ta_c^{0.6175}} \quad (A2)$$

avec

$$B = Pr + \log \left\{ 1 + Pr \exp \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1 - N}{N} \right)^{1/4} \left(\frac{NA}{(1 - N)^2} \right)^{1/2} Re_a^{-0.5} Ta^{0.1325} Ta_c^{0.1175} - 1 \right] - Pr \right\}. \quad (A3)$$

Cette expression se simplifierait beaucoup en faisant la même hypothèse que Simmers et Coney, c'est-à-dire $Pr = 1$.

$$Nu = 6 \cdot \frac{(1 - N)^{3/2}}{A \cdot N^{1/2}} \cdot Re_a \cdot Ta^{0.47} Ta_c^{-1.47} \quad (A4)$$

Simmers et Coney se basent sur une écriture plus complexe de cette expression pour examiner numériquement les variations de Nu avec Re_a (≥ 300) et Ta ; ils soulignent qu'à Ta fixé, Nu diminue lorsque Re_a augmente.

Ceci résulte probablement d'une erreur de programmation; en effet les valeurs tabulées de Re_a et de Ta_c utilisées par les auteurs dans leur calcul peuvent être très rapidement reliées empiriquement de la manière suivante :

$$Ta_c^2 = 171.74 Re_a^{0.91} \quad (A5)$$

ce qui permet d'écrire (A4) :

$$Nu = 0.137 \frac{(1 - N)^{3/2}}{A \cdot N^{1/2}} \cdot Re_a^{1/3} \cdot Ta^{0.47} \quad (A6)$$

Cette dernière expression montre, contrairement aux résultats des calculs de [11], que Re_a a une influence positive sur Nu ; (A6) est aussi en désaccord quantitatif avec les résultats expérimentaux de [11]. Ce résultat est confirmé par la Fig. 7 qui rapporte les courbes qu'il est possible d'obtenir à partir de l'équation (A2) en adoptant $Pr = 0.7$ et $N = 0.955$. L'on peut voir qu'à Ta fixé, Nu augmente avec Re_a , comme lorsque $Pr = 1$ (équation A6), valeur qui ne donne donc pas lieu à une solution singulière de (A2) qui pourrait expliquer les conclusions différentes de Simmers et Coney. Le calcul numérique de ces auteurs est donc entaché d'une erreur.

En transposant, par analogie, (A6) au transfert de matière (valeurs élevées de Sc) il vient :

$$Sh = 0.137 \frac{(1 - N)^{3/2}}{A \cdot N^{1/2}} \cdot Re_a^{1/3} Ta^{0.47} \cdot Sc^{1/3} \quad (A7)$$

Solution déduite de l'analogie de Chilton-Colburn

A partir du travail expérimental de Simmers mentionné en

[11] et relatif à l'étude des contraintes pariétales et des profils de vitesses, il semble que les tourbillons de Taylor, une fois présents dans l'espace annulaire, se comportent comme s'il n'y avait pas d'écoulement axial. Ainsi, si l'analogie de Chilton-Colburn est appliquée en adoptant comme vitesse moyenne d'écoulement la vitesse périphérique $R_1 \cdot \omega$ à la surface du cylindre tournant :

$$\frac{k}{V} \cdot Sc^{2/3} = f/2 \quad (A8)$$

avec $V = R_1 \cdot \omega$ et $f/2$ donné par (A1), donc :

$$Sh = \frac{4(1 - N)^{3/2}}{A \cdot N^{1/2}} \cdot Sc^{1/3} \frac{Re_a}{Ta} \left(\frac{Ta}{Ta_c} \right)^{1.47} \quad (A9)$$

En utilisant (A5) on déduit de (A9) :

$$Sh = 0.092 \frac{(1 - N)^{3/2}}{A \cdot N^{1/2}} \cdot Sc^{1/3} Ta^{0.47} Re_a^{1/3}, \quad (A10)$$

expression qui, mis à part le coefficient numérique, est identique à (A7).

OVERALL WALL TO LIQUID MASS TRANSFER FOR FLOWS COMBINING TAYLOR VORTICES AND AXIAL FORCED CONVECTION

Abstract—The study deals with the overall wall to liquid mass transfer in the case of laminar vortex flow between coaxial cylinders; such a flow results from the association of the forced axial liquid flow and the rotation of the inner cylinder. Empirical correlations are deduced which give the Sherwood number as a function of the axial Reynolds number Re_a and the Taylor number Ta , for three values of the intercylinder gap width. The results obtained are discussed on the basis of the existence or not of tangential waves on the vortices.

DER MITTLERE STOFFÜBERGANG ZWISCHEN WAND UND FLÜSSIGKEIT FÜR STRÖMUNGEN MIT TAYLOR-WIRBELN UND GLEICHZEITIGER AXIALER ERZWUNGENER KONVEKTION

Zusammenfassung—Die Arbeit behandelt den mittleren Stoffübergang zwischen Wand und Flüssigkeit im Fall einer laminaren Wirbelströmung in zylindrischen Ringspalten. Eine solche Strömung ergibt sich bei erzwungener axialem Strömung der Flüssigkeit und Rotation des inneren Zylinders. Es werden empirische Beziehungen abgeleitet, welche die Sherwood-Zahl als Funktion der axialen Reynolds-Zahl Re_a und der Taylor-Zahl Ta für drei Werte der Spaltweite zwischen den Zylindern angeben. Die erhaltenen Ergebnisse werden im Hinblick darauf diskutiert, ob eine Periodizität der Wirbelstrukturen in Umfangsrichtung existiert oder nicht.

СУММАРНЫЙ МАССОПЕРЕНОС МЕЖДУ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ И СТЕНКОЙ С УЧЕТОМ ВИХРЕЙ ТЭЙЛORA И АКСИАЛЬНОЙ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

Аннотация — Проведено исследование суммарного переноса массы между жидкостью и стенкой при ламинарном вихревом течении в кольцевых цилиндрических зазорах, возникающем в результате аксиальной вынужденной конвекции жидкости и вращения внутреннего цилиндра. Выведены эмпирические соотношения, определяющие число Шервуда как функцию аксиального числа Рейнольдса Re_a и числа Тэйлора Ta для трех различных расстояний между цилиндрами. Обсуждается зависимость полученных результатов от периодичности возникновения вихревых структур по периферии.